BÖLÜM 3

AKIŞKANLARIN KİNEMATİĞİ

Kinematik akışkanın hareketini, kuvvetleri göz önüne almadan yer değiştirmeler, hızlar, ve ivmeler cinsinden ifade eder.

Hız vektörü; $\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$

$$u = u(x, y, z, t)$$

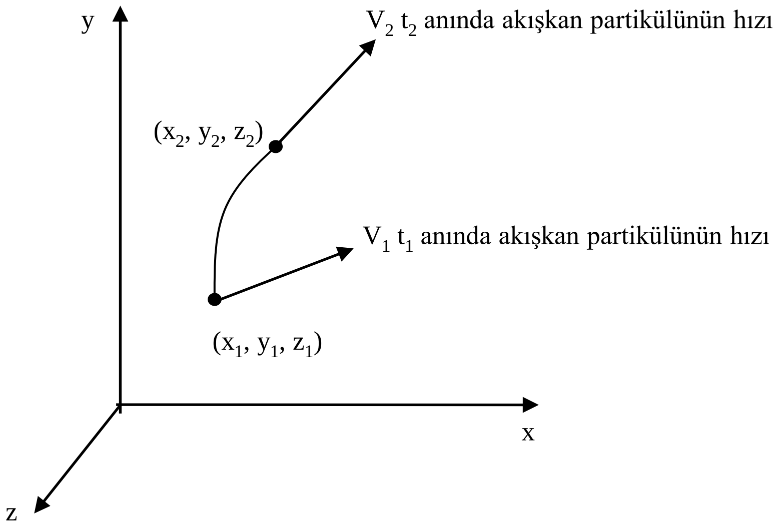
$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

AKIŞKAN HAREKETİNİ İNCELEME YÖNTEMLERİ

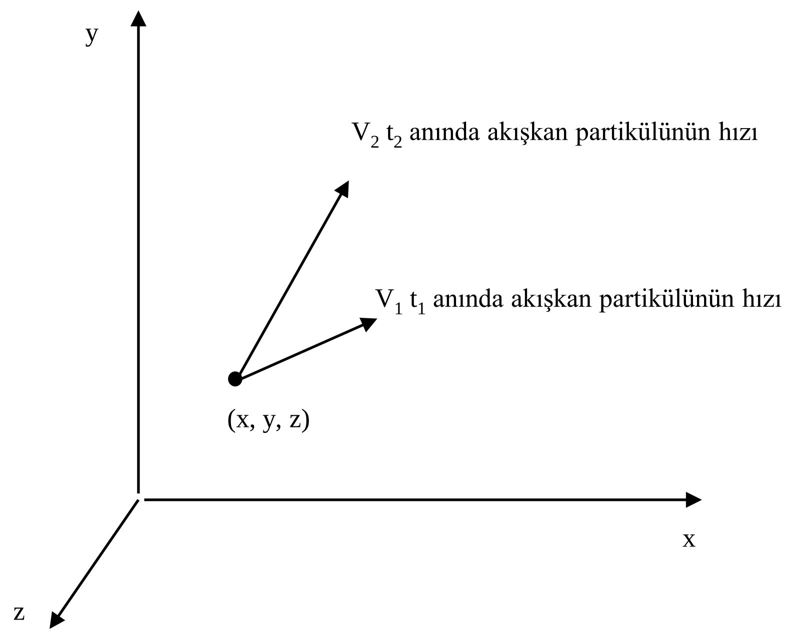
Lagrange Yöntemi: Belirli bir anda belirli bir konumda olan akışkan partiküllerinin zamanla olan hareketlerini inceler. Matematiksel olarak Lagrange hızı:

$$V = V[x(t), y(t), z(t), t]$$



Euler Yöntemi: Herhangi bir akışkan partikülünün hareketini incelemek yerine belirli bir noktadaki hızın ve basıncın zamanla değişimi araştırılır. Matematiksel olarak Euler hızı:

$$V = (x, y, z, t)$$

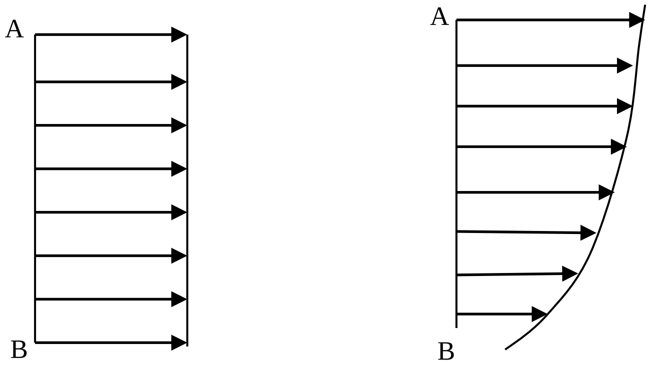


TEMEL KAVRAMLAR

Akışkan Tipleri:

a- İdeal Akışkan: Viskozitesi yani içsel sürtünmesi sıfır olan akışkanlara denir.

b- Gerçek Akışkan: Sahip oldukları içsel sürtünmeleri, viskoziteleri dikkate alınan akışkana denir.



(a) (b)

Akış Tipleri

Akışkan akımı içindeki bir noktada akışkan özellikleri, bulunduğu noktanın konumunun ve zamanın fonksiyonudur. Bu özellik;

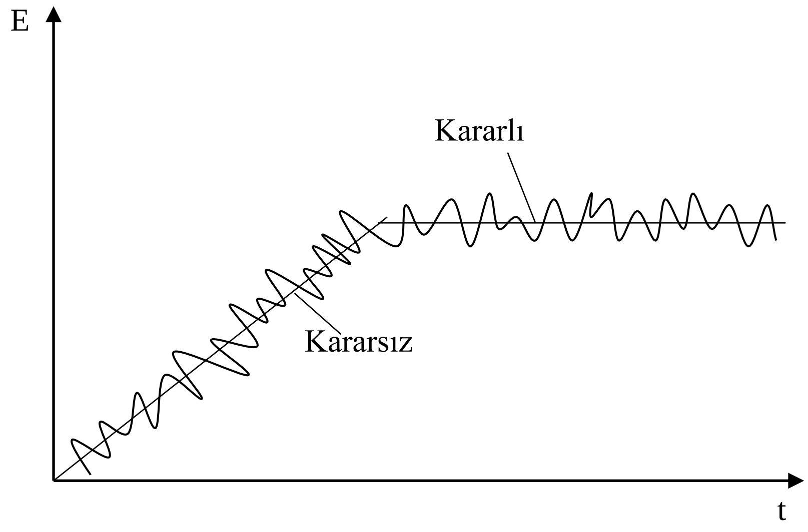
$$E = E\,(x, y, z, t)$$

ile tariflenebilir. Burada E, yoğunluk, hız, sıcaklık, basınç ve benzeri akışkanın yada akımın herhangi bir özelliğidir. Buna göre Akış tipleri:

Kararlı ve Kararsız akım

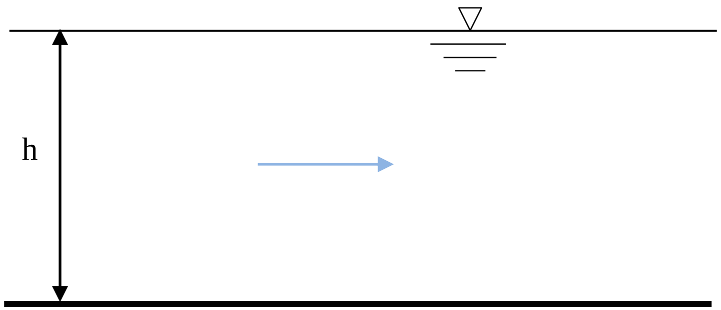
Bir akışkan akımı içinde dikkate alınan herhangi bir noktadaki akıma ve akışkana ait tüm özelliklerin zamanla değişmeden (μ, ρ, h, v, ... gibi) sabit kalması halindeki akıma kararlı (permenant) akım denir.

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad \text{veya} \quad E = E(x, y, z)$$



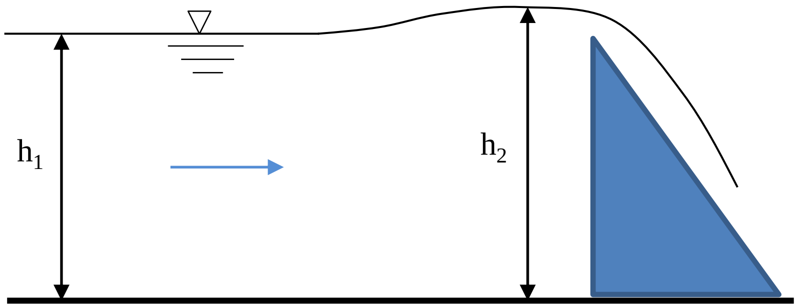
$$\frac{\partial E}{\partial t} \neq 0$$

Üniform ve Üniform Olmayan Akım



$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0$$

(a) Üniform Akım



$$\frac{\partial E}{\partial x} \neq 0$$

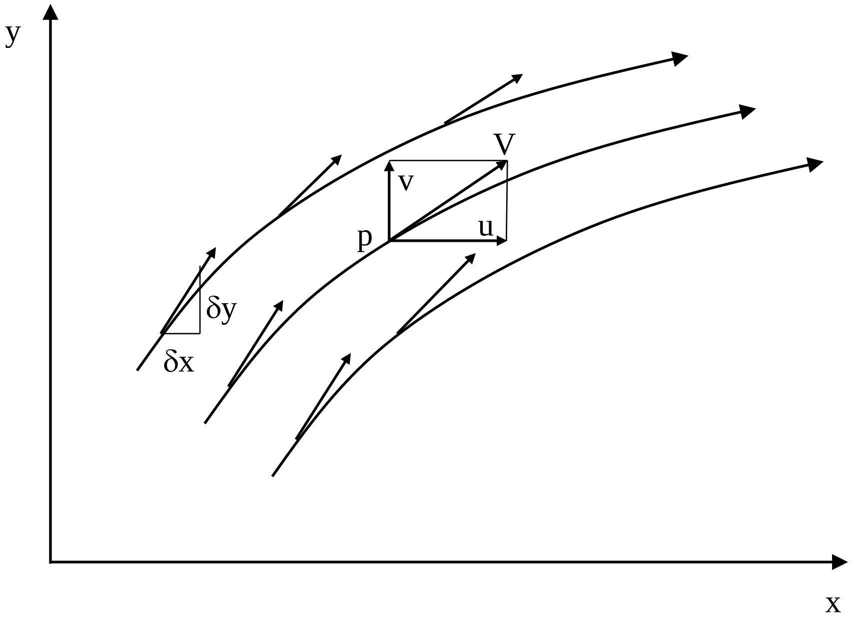
(b) Üniform olmayan akım

Akım Çizgisi

Belirli bir t anında akışkan akımı içinde çeşitli konumlardaki akışkan partiküllerinin hız vektörlerine teğet olarak çizilen çizgilere akım çizgisi adı verilir.

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$$

$$\vec{\delta}_s = \delta_x \vec{i} + \delta_y \vec{j}$$



$$\frac{\delta_x}{u} = \frac{\delta_y}{v}$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

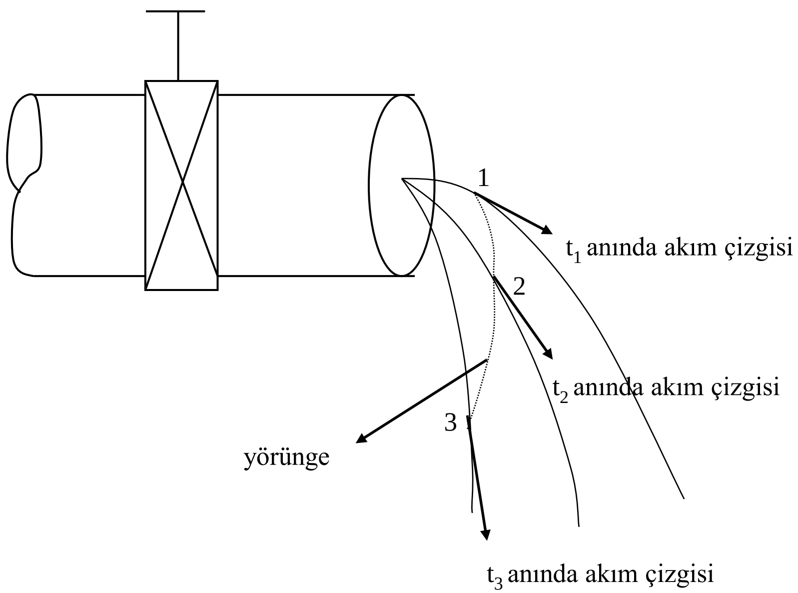
$$vdx - udy = 0$$

Bu ifade iki boyutlu akım ortamında bir akım çizgisinin denklemidir.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$ Üç boyutlu akım için

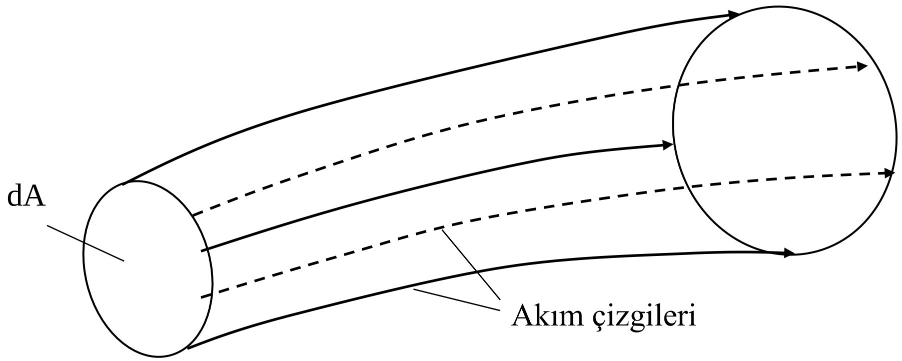
Yörünge

Akışkan moleküllerinin akışkan akımı içinde izledikleri yola yörünge denir.



Akım Tüpü (Borusu)

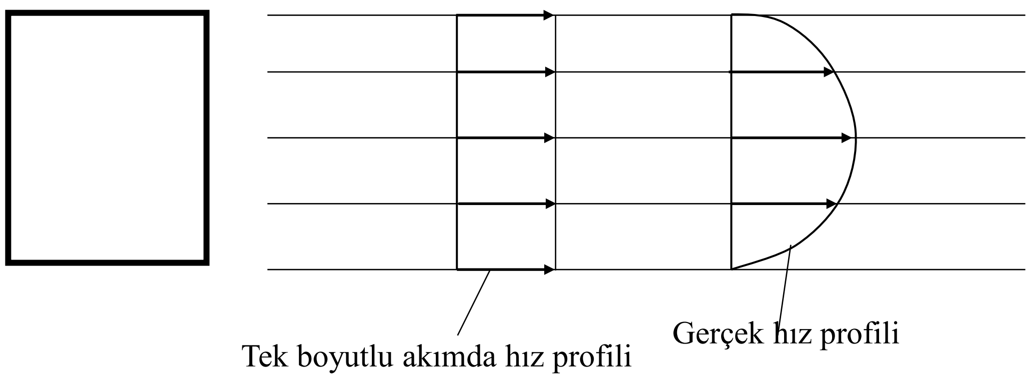
Akış içinde akım yönüne dik çok küçük bir dA alanı dikkate alınırsa bunun çevresindeki bütün noktalarda belirli bir t anında geçen akım çizgilerinin oluşturduğu geçide akım tüpü veya akım borusu denir.



Akım Boyutu

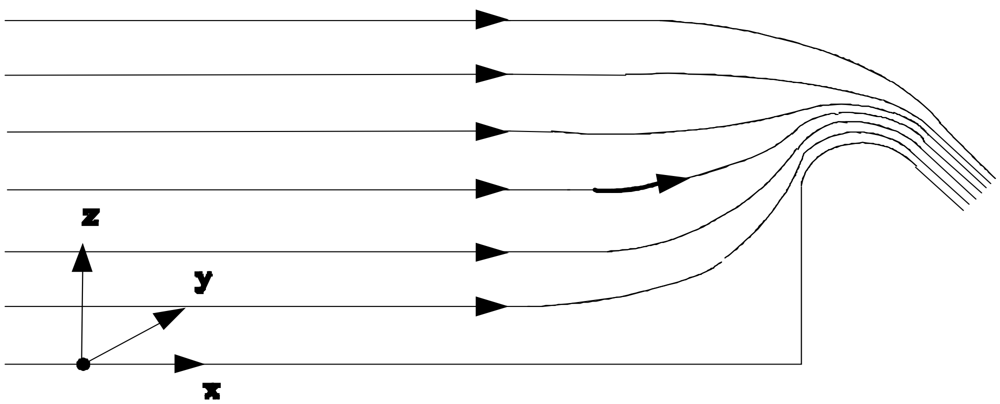
Bir boyutlu akım:

Akım parametrelerinin tek bir koordinatın fonksiyonu olarak değiştiği kabul edilir.



İki boyutlu akım

Eğer akım çizgileri bir doğrultuya dik düzlemler üzerinde aynı geometrik biçimi koruyarak düzlemler üzerindeki iki dik koordinat eksenine göre değişmeler gösteriyorsa akım iki boyutludur.



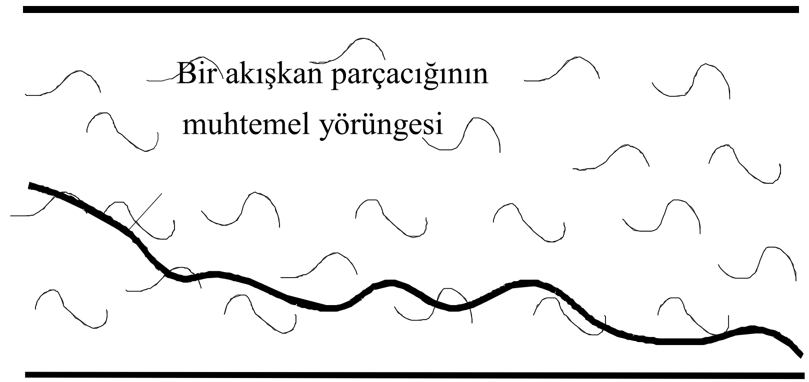
Üç boyutlu akım

Akışkan ve akıma ait büyüklüklerin x,y,z, koordinat doğrultularında bileşenleri var ise bu tip akımlara üç boyutlu akım adı verilir.

Laminer Akım, Türbülanslı Akım

(Tabakalı akım, çalkantılı akım)

(a) Laminer akım

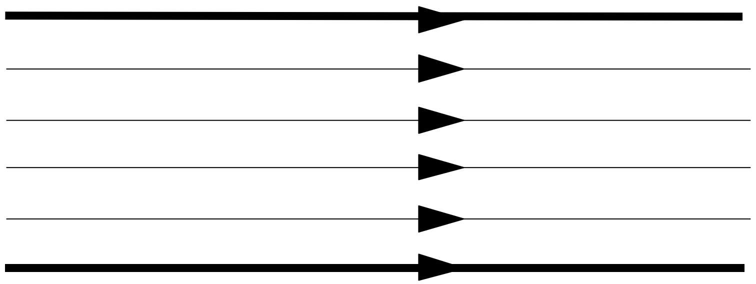


(b) Türbülanslı akım

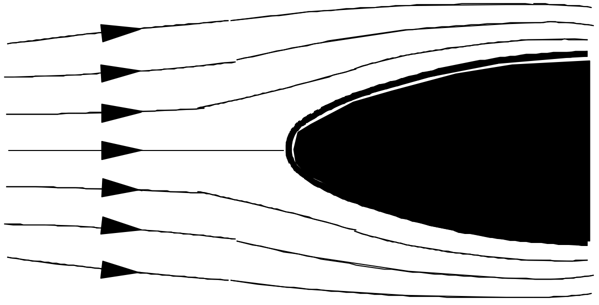
Sıkışmayan Akım, Sıkışan Akım

Sıkışmayan akımlar özgül kütlesi basınç ile pratik olarak değişmez kabul edilebilen akışkanların akımıdır. Sıvı akımları sıkışmayan, gaz akımları sıkışan akımlar olarak kabul edilirler.

Dahili Akım, Harici Akım

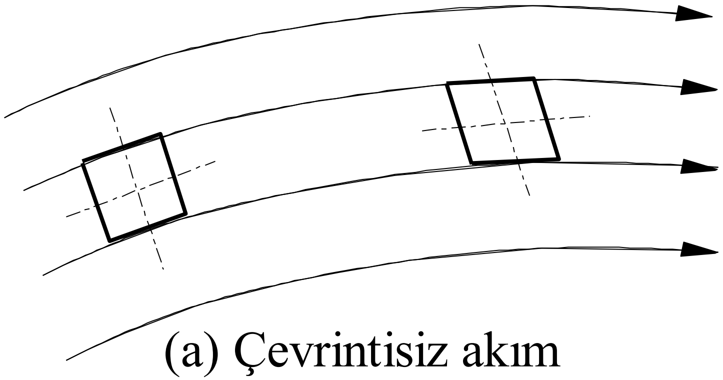


(a) Dahili akım

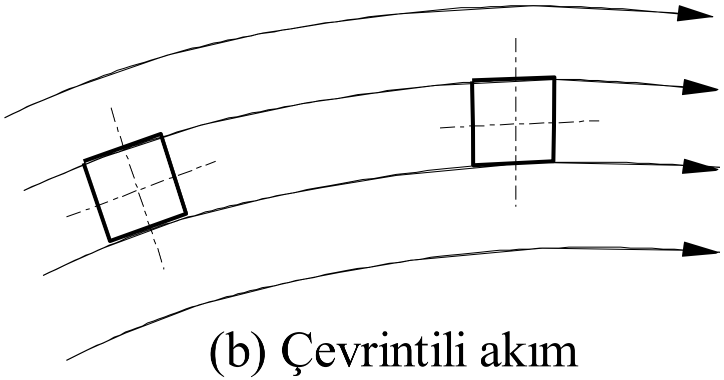


(b) Harici akım

Çevrintisiz Akım, Çevrintili Akım



(a) Çevrintisiz akım



(b) Çevrintili akım

AKIMDA HIZ ve İVME KAVRAMI

Kartezyen Koordinatlarda Gösteriliş

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

Bir dt zamanı içindeki hız değişimi yani hızın total diferansiyeli;

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

Buna göre ivme hızın total türevi alınarak:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = u\,, \frac{dy}{dt} = v\,, \frac{dz}{dt} = w$$

olarak hızın skaler bileşenleridir. O halde ivme

$$\vec{a} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Vektörel olarak;

$$\vec{a} = (\vec{V}.\vec{\nabla})\,\vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{a} = (\,u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\,)\,.\,(\,\frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k})\,\vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

ivme vektörünün skaler bileşenleri;

$$\frac{du}{dt} = a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{dv}{dt} = a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{dw}{dt} = a_z = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

1-<u>Yersel ivme</u>: Herhangi bir t anında noktadan noktaya değişen ivmedir.

2-<u>Zamansal ivme</u>: Akım alanındaki bir noktada zamana bağlı olarak değişen ivmedir.

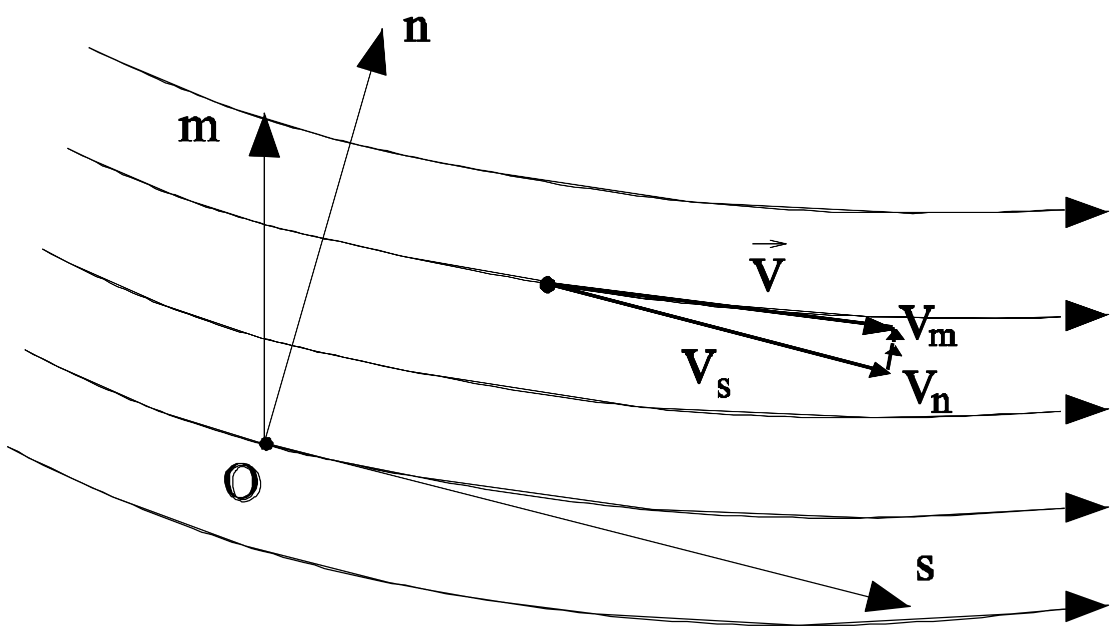
Düzenli Akımda: $\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ dır.

$$\vec{a} = u\,\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\,\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\,\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

Düzenli üniform akımda ise yersel ivmede sıfırdır.

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \vec{V} = \text{Sabit}$$

Akım Çizgisi Koordinatlarında



Seçilen koordinat sistemine göre hız alanı:

$$\vec{V} = V_s\,\vec{i}_s + V_n\,\vec{i}_n + V_m\,\vec{i}_m$$

$$\vec{V} = \vec{V}(s, n, m, t)$$

$$\vec{V} = \vec{V}(s, t)$$

Hızın bir dt süresindeki total diferansiyeli:

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} ds + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

ve total türevi:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = V\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Yersel ivme | Zamansal ivme

ivmenin skaler bileşenleri :

$$a_s = \frac{dV_s}{dt} = V\frac{\partial V_s}{\partial s} + \frac{\partial V_s}{\partial t}$$

$$a_n = \frac{dV_n}{dt} = V\frac{\partial V_n}{\partial s} + \frac{\partial V_n}{\partial t}$$

$$a_m = \frac{dV_m}{dt} = V\frac{\partial V_m}{\partial s} + \frac{\partial V_m}{\partial t}$$

(a) $V_s \approx V$ varsayımı ile

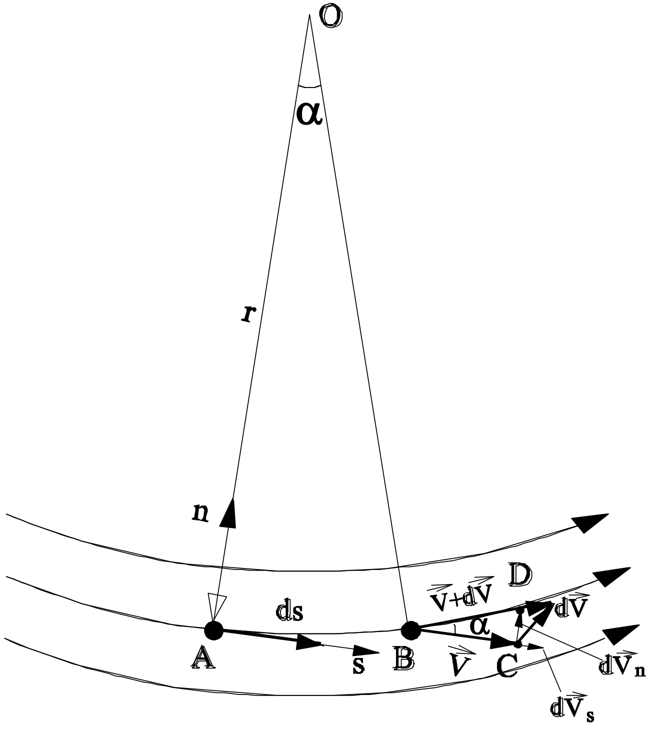
$$V\frac{\partial V_s}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

Şekildeki OAB ve BCD

üçgenlerinin benzerliğinden:

$$\frac{dV_n}{ds}=\frac{V}{r}$$

$$V\frac{\partial V_n}{\partial s}=\frac{V^2}{r}$$



$$V \frac{\partial V_m}{\partial s} = 0$$

$$a_s = \frac{dV_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{\partial V_s}{\partial t}$$ Teğetsel bileşen

$$a_n = \frac{dV_n}{dt} = \frac{V^2}{r} + \frac{\partial V_n}{\partial t}$$ Normal bileşen

$$a_m = \frac{dV_m}{dt} = \frac{\partial V_m}{\partial t}$$

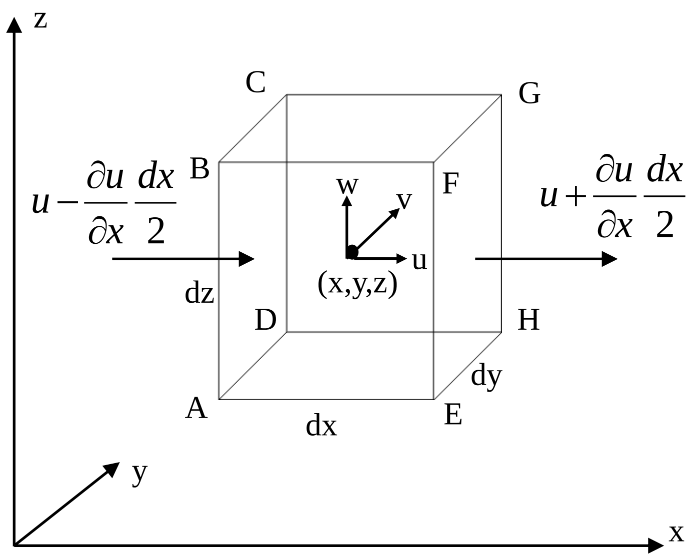
Düzenli Akım için :

$$\vec{V} = \vec{V}(s)$$

$$a_s = \frac{d}{ds}\left(\frac{V^2}{2}\right) \quad , \qquad a_n = \frac{V^2}{r}$$

AKIMDA KÜTLENİN KORUNUMU VE SÜREKLİLİK DENKLEMİ

Kartezyen Koordinatlarda Üç boyutlu Gösteriliş



$$\begin{bmatrix} \text{Kontrol Hacme Birim} \\ \text{Zamanda Giren Kütle} \\ \text{Miktarı} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Kontrol Hac min den Birim} \\ \text{Zamanda Çıka Kütle} \\ \text{Miktarı} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Kontrol Hacim İçinde} \\ \text{Birim Zamanda Yığıla} \\ \text{Miktarı} \end{bmatrix}$$

x eksenine dik yüzeylerdeki ortalama hızlar;

ABCD yüzeyinde: $u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}$

EFGH yüzeyinde: $u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}$

Elemanın merkezinde birim yüzeyden birim zamandaki kütle akısı: $\rho u, \rho v, \rho w$

ABCD yüzeyinden dt zamanında giren kütle: $\left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dydzdt$

EFGH yüzeyinden dt zamanında çıkan kütle: $-\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dydzdt$

x yönünde dt zamanında elemana giren net kütle:

$$\left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dydzdt - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dydzdt \;\; = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdydzdt$$

y yönünde:dt zamanında elemana giren net kütle: $-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dxdydzdt$

z yönünde:dt zamanında elemana giren net kütle: $-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dxdydzdt$

dt zamanında elemana giren toplam kütle:

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]dxdydzdt$$

Elemanın kütlesi: $m = \rho dxdydz$

dt zamanında hacim içindeki kütlenin artma miktarı:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, dz\, dt$$

Eleman içinde kütlenin yaratılması veya yok edilmesi söz konusu olmadığına göre bu iki değer eşit olmalıdır.

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dxdydzdt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, dz\, dt$$

veya

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Süreklilik denkleminin Diferansiyel formu elde edilir.

Vektörel olarak:

$$\mathrm{div}(\rho\vec{V}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}.\rho\vec{V} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

Vektörel olarak, Sıkışan Değişken akım için

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}.\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$$

Düzenli Akım: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

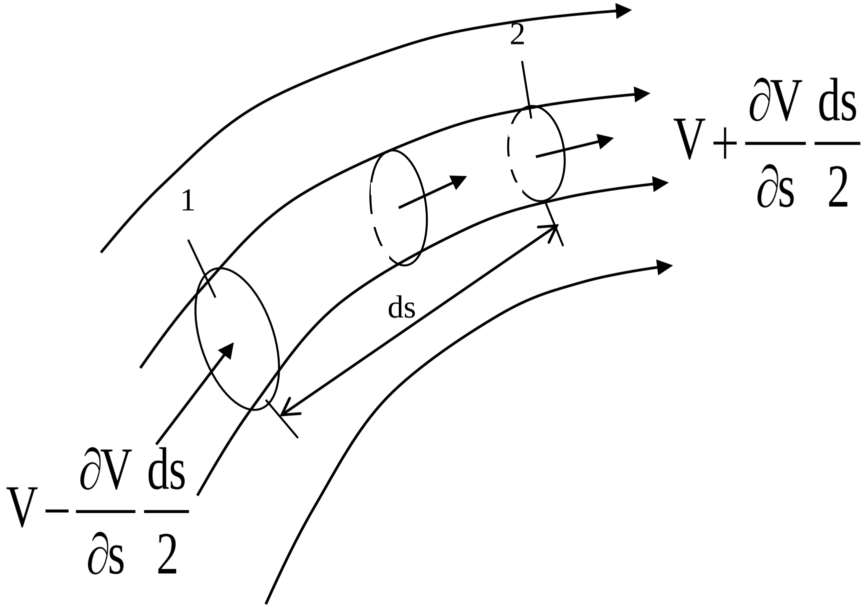
$$\vec{V}.\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$$

Sıkışmayan Akımda $\rho = \text{sabit} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\ ,\ \vec{\nabla}\rho = 0$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Akım Çizgisi Koordinatlarında Bir boyutlu Gösteriliş



1 Yüzeyinden dt zamanında giren kütle: $\left[\rho AV-\frac{\partial(\rho AV)}{\partial s}\frac{ds}{2}\right]dt$

2 Yüzeyinden dt zamanında çıkan kütle: $-\left[\rho AV+\frac{\partial(\rho AV)}{\partial s}\frac{ds}{2}\right]dt$

dt zamanında elemana giren toplam kütle: $-\frac{\partial(\rho AV)}{\partial s}\,ds\,dt$

dt zamanında eleman hacmindeki kütle artması: $\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}\,ds\,dt$

$$-\frac{\partial(\rho AV)}{\partial s}\,ds\,dt = \frac{\partial(\rho A)}{\partial t}\,ds\,dt$$

Buradan sıkışan değişken akımda süreklilik denklemi:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial s} = 0$$

Sıkışan Düzenli Akımda: $\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0$

$\frac{\partial(\rho AV)}{\partial s} = 0 \Rightarrow$ $\quad m = \rho AV = \text{Sabit}$ $\quad$ kg/s (kütle debisi)

Sıkışmayan Değişken Akım: ρ=sabit, A=A(s,t)

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}+\frac{\partial(AV)}{\partial s}=0$$

Sıkışmayan düzenli Akımda: ρ=sabit, $\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}=0$

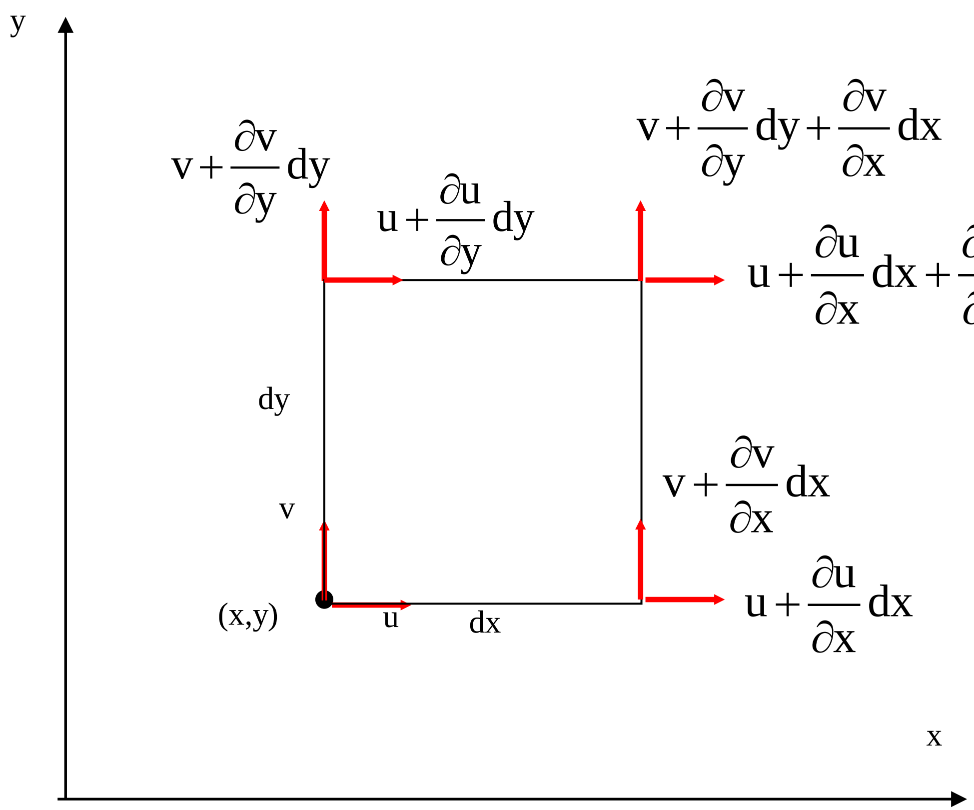
$$\frac{\partial(AV)}{\partial s}=0$$

Akım Debisi m^3/s

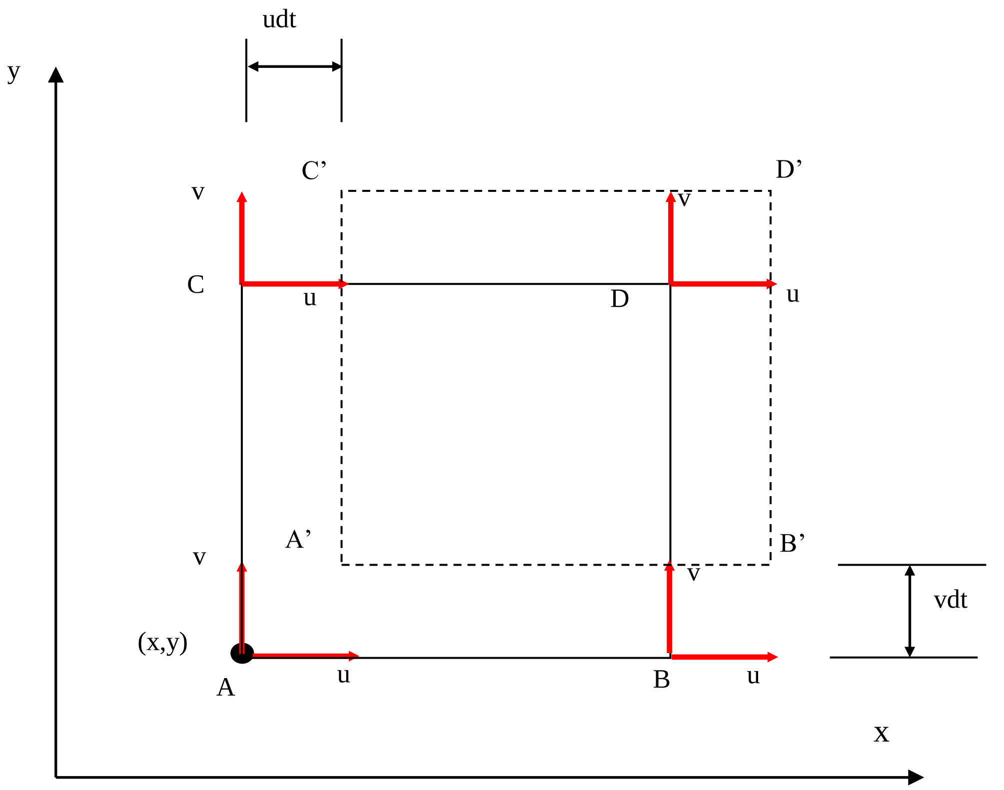
$$Q=A\,V=Sabit$$

Akım Debisi m^3/s

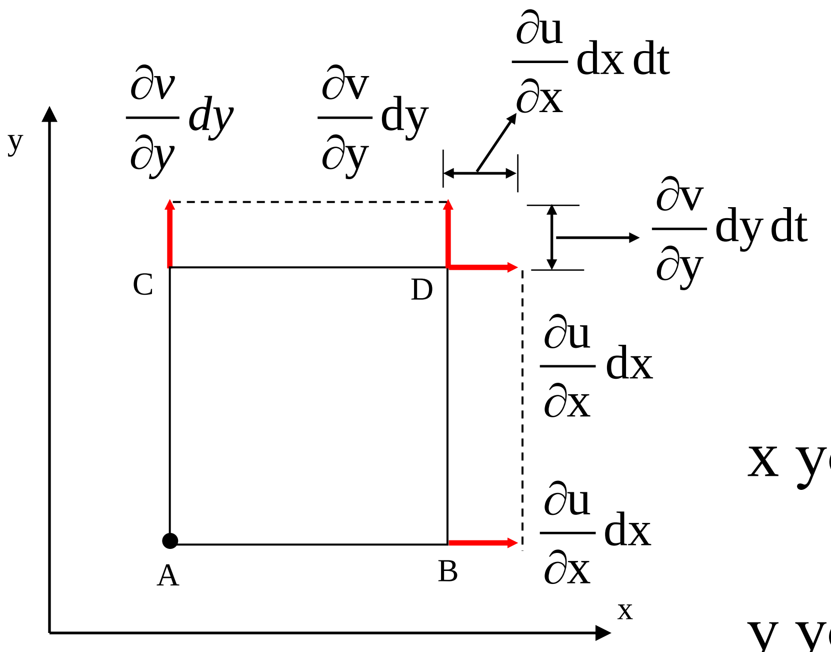
AKIŞKANIN YERSEL HAREKET BİLEŞENLERİ



Ötelenme



Doğrusal Genleşme (Deformasyon)



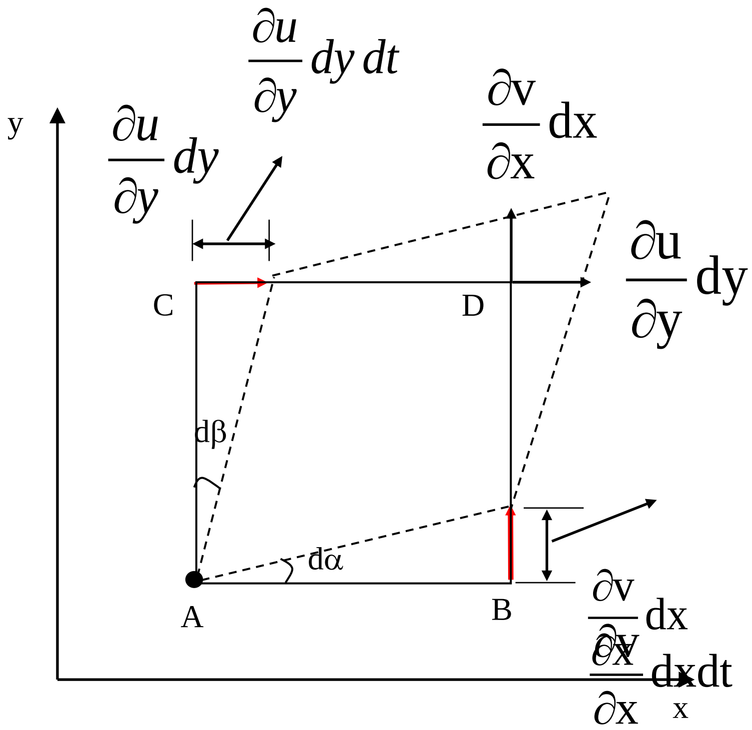
Boy değişmeler   Doğrusal deformasyon

x yönünde : $\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{dx\,dt}$ $\in_x = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{dt}$

y yönünde : $\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{dy\,dt}$ $\in_y = \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{dt}$

x ve y yönündeki deformasyon hızları: $\dot{\in}_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\dot{\in}_y = \frac{\partial v}{\partial y}$

Açısal Genleşme (Deformasyon)



$$d\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx\, dt}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

$$d\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy\, dt}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

Eleman yüzeyinin xy düzlemindeki toplam açısal genleşmesi:

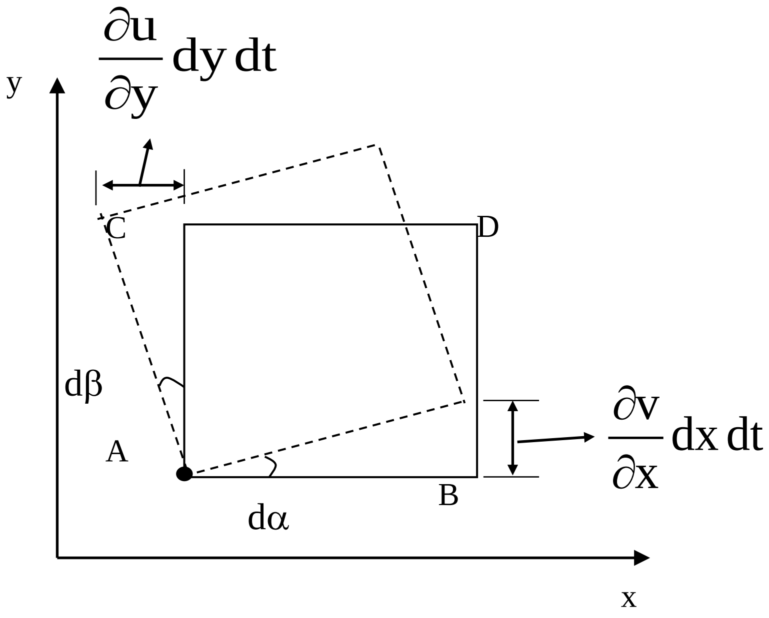
$$\gamma_{xy} = d\alpha + d\beta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt$$

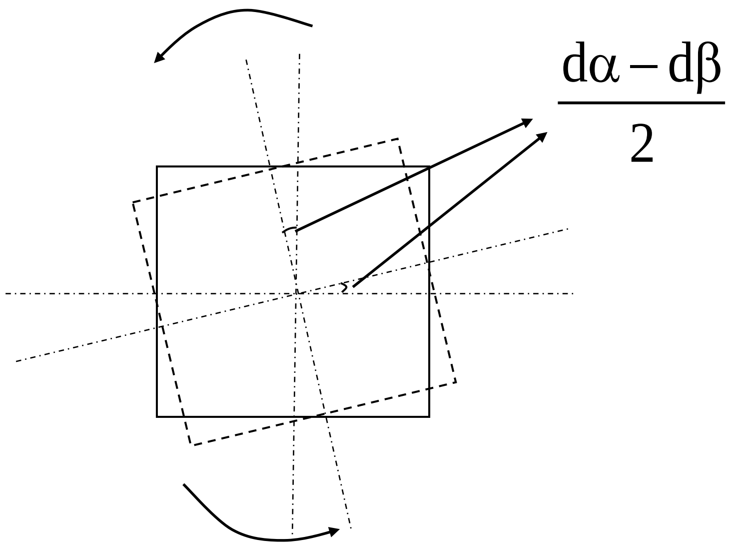
xy düzlemindeki açısal deformasyon hızı: $\dot{\gamma}_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

yz düzlemindeki açısal deformasyon hızı: $\dot{\gamma}_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$

zx düzlemindeki açısal deformasyon hızı: $\dot{\gamma}_{zx} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$

Açısal Dönme Çevrinti (Rotasyon)





Kenarların dönmeleri:

$$d\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx\, dt}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} dt \qquad d\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy\, dt}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

ortalama net açısal dönme : $\dfrac{d\alpha - d\beta}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) dt$

Buna göre z eksenine dik açısal hız : $\omega_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

diğer eksenlere göre açısal hız bileşenleri :

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Bileşke açısal hız: $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla x \vec{V}$$

$2\vec{\omega}$ değerine hidromekanikte çevrinti vektörü adı verilir.

$$2\vec{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$2\vec{\omega} = \vec{\nabla} \text{ x } \vec{V}$$

Çevrintisiz akımlarda açısal hız vektörü $\vec{\omega} = 0$ olduğundan çevrinti vektörü sıfır olacaktır.

$$2\vec{\omega} = \vec{\nabla} \text{ x } \vec{V} = 0$$

x-y düzleminde : $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

y-z düzleminde : $\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial z}$

x-z düzleminde : $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial x}$